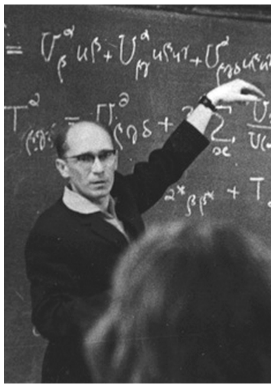
УДК 523.214



Молчанов А.М.

Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы

Молчанов Альберт Макарьевич (1928–2011), выдающийся советский российский математик. Ученик И.М. Гельфанда, А.Я. Хинчина, М.В. Келдыша и Н.В. Тимофеева-Ресовского. Организатор и директор Института математических проблем биологии РАН (1972–1998). Автор более 200 научных работ в области функционального анализа, газодинамики, теории устойчивости, нелинейных колебаний и математического моделирования биологических процессов и систем. Основные научные результаты: критерий дискретности спектра оператора Шрёдингера (критерий Молчанова, 1952); расчет точечного взрыва в неоднородной атмосфере (численное решение, совместно с К.И. Бабенко и В.В. Русановым, 1955), условие устойчивости нелинейных систем, нейтральных в линейном приближении (теорема Молчанова, 1961), гипотеза о роли колебательных процессов в эволюции (1967), гипотеза резонансной структуры Солнечной системы (гипотеза Молчанова, 1968), математическая модель иммунитета (1970), эргодическая гипотеза сукцессии (1975).

В статье изложена история изучения резонансных движений и современное состояние вопроса. Сформулировано предположение о решающей роли «исчезающих» диссипативных факторов в формировании резонансных структур. Приведены общие соображения о значении резонансных явлений в естествознании.

Ключевые слова: колебания, резонанс, Солнечная система, диссипация.

ОТ РЕДАКТОРА СТАТЬИ

Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы занимает одно из центральных мест в научном творчестве А.М. Молчанова. Над этой темой он работал около 15-ти лет и посвятил ей восемь статей[1]. *Локальные* резонансы в Солнечной системе – т.е. синхронизации вращения двух или нескольких небесных тел – известны давно[2]. К ним относятся система «Земля – Луна», «Юпитер – Галилеевы спутники», и др. В своей гипотезе А.М. Молчанов аргументирует резонансный характер структуры *всей* Солнечной системы и высказывает очень глубокую мысль: резонансность характерна для любой эволюционно зрелой динамической системы.

В предлагаемой статье автор подводит итоги многолетних исследований резонансной структуры Солнечной системы и перебрасывает методический «мостик» к работам по математическому моделированию биологических систем и процессов. Статья была впервые опубликована около 40 лет назад[3]. Ее настоящая редакция публикуется с любезного разрешения Д.А. Молчановой. Текст не изменен. Мной подготовлены биографическая справка, аннотация, комментарии, уточнены ссылки и цитаты. Я признателен Л.Н. Красно-

[1] Молчанов А.М. Об эволюции планетных систем // Проблемы движения искусственных небесных тел: Доклады на Конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии, Москва, 20-25 нояб. 1961. М.: Изд. АН СССР, 1963. С. 42-49; Moltchanov A.M. Sur l’évolution des systèmes planétaires // Dynamics of Satellites: Proceedings of the Symposium of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM), 28-30 May 1962, Paris, France. Berlin: Springer, 1963. P. 40-50; Молчанов А.М. Резонансы в многочастотных колебаниях // Доклады АН СССР. 1966. Т. 168. № 2. С. 284-287; Molchanov A.M. The resonant structure of the Solar system. The law of planetary distances // Icarus. 1968. Vol. 8. № 1-3. P. 203-215; Molchanov A.M. Resonances in complex systems: A reply to critiques // Icarus. 1969. Vol. 11. № 1. P. 95-103; Molchanov A.M. The reality of resonances in the Solar system // Icarus. 1969. Vol. 11. № 1. P. 104-110; Молчанов А.М. О резонансной структуре Солнечной системы // Современные проблемы небесной механики и астродинамики: Труды Конференции по общим вопросам небесной механики и астродинамики, Москва, 23-29 марта 1967. М.: Наука, 1973. С. 32-42; Молчанов А.М. Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы. Препринт. Пущино: НЦБИ АН СССР, 1974. 19 с.

[2] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Наука, 1977. С. 137-149; Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. С. 242-244; Белецкий В.В., Хентов А.А. Резонансные вращения небесных тел. Н. Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 1995. 430 с.

[3] Молчанов А.М. Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы. Препринт. Пущино: НЦБИ АН СССР, 1974. 19 с. Воспроизведена: Молчанов А.М. Нелинейности в биологии. Пущино: ПНЦ РАН, 1992. С. 186–205.

польской (ИФ РАН) и П.А. Шарому (ИФХиБПП РАН) за обсуждение работы, и Г.Р. Смирновой (ИМПБ РАН) за техническую помощь.

Флоринский Игорь Васильевич,
доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института математических проблем биологии РАН,
e-mail: iflor@mail.ru

Введение. История вопроса

Небесная механика стала количественной, математической наукой после формулировки Ньютоном закона всемирного тяготения[1]. Движение планет Солнечной системы определяется (в главном члене) полем тяготения Солнца, основного, резко доминирующего тела системы. С точки зрения теории колебаний, планетная система состоит из одночастотных колебательных подсистем, почти независимых, слабо связанных друг с другом. Необходимо подчеркнуть, что распадение на колебательные подсистемы существенно отличается от распадения на физические тела – планеты. Каждая колебательная подсистема состоит из пары физических тел – Солнца и планеты. Таким образом, в сложной колебательной системе – планетной – Солнце повторено девятикратно (по числу планет).

Большое вековое возмущение – резонанс Юпитера и Сатурна

Ньютон[2] объяснил кеплеровы эллипсы[3] и разобрал кометные гиперболы. Учет следующего малого члена – взаимодействие планет – был осуществлен Лагранжем[4] и Лапласом[5] в форме теории возмущений[6]. Сам Ньютон считал, что взаимные возмущения планет приводят Солнечную систему в беспорядок, и только божественное вмешательство сохраняет стройную картину мироздания[7].

Резонансные явления появляются уже на этом этапе в роли пособников дьявола. Драматическая ситуация, причиной которой явилась почти соизмеримость периодов Юпитера и Сатурна, сочувственно описана Субботиным[8]: «Большое неравенство в движении Юпитера и Сатурна, зависящее от делителя» $2\omega_{♄} - 5\omega_{♃}$ «было открыто эмпирически. Эйлер и Лагранж, после ряда безуспешных попыток объяснить его, стали склоняться к мнению, что это неравенство указывает на действие какой-то силы, отличной от притяжения Солнца и известных планет. Истинная причина была открыта в 1784 г., когда Лаплас предпринял вычисление всех неравенств первого порядка в движении Юпитера и Сатурна до третьей степени включительно»[9].

---

[1] Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica. London: Joseph Streater, 1687. 510 p. Имеется перевод: Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. А.Н. Крылова // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 7. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1936. 688 с.

[2] Newton I. Loc. cit.

[3] Имеется в виду первый закон Кеплера: каждая планета обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. – Kepler J. Astronomia nova αιτιολογητοσ, seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae martis. Heidelberg: Voegelin, 1609. 337 p. – *Прим. И.Ф.*

[4] Lagrange J.-L. Sur l'altération des moyens mouvements des planètes // Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. 1776. T. 7. P. 199–213. – *Прим. И.Ф.*

[5] Laplace P.S. Recherches: 1° Sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards; 2° Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris (Savants Étrangeres). 1776. T. 7. P. 37–232. – *Прим. И.Ф.*

[6] Теория возмущений – математический подход, используемый для нахождения приближенного решения уравнения движения. Заключается в разложении уравнения по малому параметру и последующему решению уравнения почленно. – http://en.wikipedia.org/wiki/Perturbation_theory. – *Прим. И.Ф.*

[7] Имеется в виду высказывание Ньютона: «Elegantissima haecce Solis Planetarum & Cometarum compages, non nisi consilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit». – Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. 2nd enl ed. Cantabrigiae, 1713. P. 482. Перевод: «Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого Существа». – Ньютон И. Указ. соч. С. 659. – *Прим. И.Ф.*

[8] Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 2. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1937. С. 50

[9] В беседе со спецкором журнала «Знание – сила» Карлом Левитиным А.М. Молчанов описывал эти события так: «Законы тяготения, открытые Ньютоном, привели его к представлению о высшем разуме, правящем мирами. В самом деле, если есть два тела – скажем, одинокая планета вращается вокруг Солнца или мимо него пролетает одна-единственная разогнавшаяся где-то далеко комета, – то все получается прекрасно: планета вращается по кругу, комета улетает по гиперболе. Но вот появилось третье небесное тело. Между ним и двумя другими действуют силы тяготения, пусть даже небольшие, но действуют! Стало быть, вращение по кругу становится уже невозможным: из его обязательности в задаче двух тел прямо следует его невозможность в ситуации с тремя и тем более четырьмя, пятью и так далее телами. А поскольку планеты в действительности вращались вокруг нашего светила по кругам или слабо вытянутым эллипсам, то внимательный и объективный взгляд на ночное небо убеждал Ньютона, что необходимо вмешательство высшей силы, чтобы постоянно возвращать все планеты на круги своя.

Во времена Эйлера с орбитами большинства планет разобрались, сообразив, что малые возмещения их можно учесть так называемой пертурбационной теорией, которая показывает, что влияние планет друг на друга приводит лишь к некоторому дрожанию вокруг идеального пути, предписанного им Ньютоном. И лишь Юпитер и Сатурн отказывались укладываться в общие рамки: в их движении было регулярное отклонение от теоретически рассчитанного, которое никакими малыми возмущениями не объяснялось.

И именно в связи с этой задачей Эйлер сформулировал и принцип наименьшего действия, и вариационное исчисление и пришел к выводу, что есть дополнительная сила – Бог, – которая бдит за мировой гармонией, плавно и постоянно мягкой рукой подправляя движения даже далеких от нас планет. Теорема о бытии божьем Эйлеру казалась доказанной строго математически.

И вот как раз эту теорему Эйлера Лаплас и опроверг – в этом именно и состоит смысл приписываемых ему слов: «В этой гипотезе я не нуждаюсь!», – якобы сказанных им Наполеону.

…Пертурбационная теория показывала, что из-за малых взаимодействий планет между собой на их движения накладывается мелкая рябь. Идеальные синусоиды обезображиваются как высокочастотными, быстрыми, так и, что особенно важно, низкочастотными, медленными колебаниями. Это еще не было странным: в конце концов, могут же движения планет быть подверженными периодическим отклонениям – быстрым, повторяющимся через десять–двадцать лет, как у Юпитера и Сатурна, или очень медленным, период которых равняется тысячелетиям. Беда была в том, что некоторые члены уравнений оказывались непериодичными: они медленно, но неуклонно росли, потому что записывались как крайне малая величина, помноженная на время. При малых временах этими членами легко можно было пренебречь, но с течением лет и столетий

Троянцы. Резонанс 1:1 (унисон)

Существует очень немного точных решений задачи трех тел[1]. Одно из них – треугольник Лагранжа[2] – является резонансным движением[3]. Наблюдение опоздало более чем на сто лет по сравнению с теорией. Только в 1906 г. Вольф открыл (применив стереоскоп) первый астероид[4], образующий вместе с Юпитером и Солнцем равносторонний лагранжев треугольник. В настоящее время известно более дюжины[5] астероидов-троянцев[6]. Астероиды, названные именами греческих героев, предшествуют Юпитеру[7]. В эту группу, впрочем, попал (видимо, в качестве пленника) Гектор (№ 624)[8]. Побежденные троянцы замыкают это торжественное шествие во славу науки[9].

Пояс астероидов. Пробелы Кирквуда

Большую серию резонансных движений, воспринимаемых опять-таки как досадные помехи[10] в стройной теории, доставляет пояс астероидов. Хорошо известны[11] пробелы Кирквуда[12], соответствующие резонансам 1:2, 2:5, 1:3 с обращением Юпитера. Менее заметные понижения в кривой распределения периодов обращения астероидов возникают при резонансах 1:4, 1:5, 3:5, 3:7.

Существует и противоположная ситуация – группировка орбит вблизи точек 3:4 и 2:3. В музыкальной терминологии это – «кварта» и «квинта». «Прима» также устойчива и соответствует группе троянцев.

Кольца Сатурна

Знаменитая «щель Кассини»[13] имеет резонансную природу. Она занимает ту зону, в которой частички, составляющие кольца Сатурна, имели бы периоды, близкие к 1/2 периода Мимаса, 1/3 периода Энцелада и 1/4 периода Тефии[14]. Для понимания этого явления недостаточно было обнаружить щель и открыть спутники Сатурна. С этим справился сам Кассини. Мало было даже открыть другие пробелы в кольцах Сатурна[15]. Только в XIX веке Кирквуд, сопоставив пробелы в поясе астероидов с кольцами Сатурна, осознал единый резонансный механизм образования пробелов[16].

величина их становилась уже вполне ощутимой. Теоретически рассчитанный вековой уход неких условных узлов в геометрии небесных сфер искажал орбиты планет совершенно недопустимым образом. Что же тогда произошло бы за миллион лет, если бы не… если бы не что? Кто же все-таки подправляет ход вселенских часов?

Эта каша – в головах и в формулах (а формула движения Луны, например, занимала больше двадцати страниц сплошного текста, где были одни синусы в самых различных степенях и просто линейные члены, и степенные функции и произведения всех их в различных сочетаниях) досталась Лапласу. Гениальность его состояла в том, что он не стал, как это было принято, избавляться от периодических тригонометрических функций, применяя хорошо знакомую ему формулу Эйлера, которая говорила: синус очень малой величины приближенно равен самой этой величине. Нет, Лаплас поступил прямо наоборот: вековые непериодические члены уравнений он представил в виде синусов, обратив формулу своего учителя Эйлера. Теперь все уравнения стали включать в себя только периодические функции – никакой член уже больше не рос постоянно с течением времени, но все они испытывали колебания с тем или иным периодом, как и положено честным синусам.

… Вселенная закрутилась сама по себе, первоначальный толчок перестал быть ей нужным. Оставались Юпитер и Сатурн с их строптивым нежеланием быть как все. Но тут Лаплас вновь проявил гениальность – он понял: периоды их вращения таковы, что в определенные моменты наступает резонанс, и планеты-гиганты в эти мгновения как бы подталкивают, подкручивают друг друга, сами собой, без помощи извне. Необходимость в Господе Боге отпала, о чем Лаплас и заявил во всеуслышание своими работами». – Левитин К. Масштабы времени // Знание – сила. 1986. № 11. С. 25–26. – *Прим. И.Ф.*

[1] Задача трех тел состоит в определении относительного движения трех тел, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона. – *Прим. И.Ф.*

[2] Lagrange J.-L. Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps, qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences en 1772 // Recueil des Pieces qui ont Remporté les Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris. 1777. T. 9. P. 1–126. – *Прим. И.Ф.*

[3] Если построить два равносторонних треугольника, две вершины которых соответствуют центрам двух массивных тел, то третьи вершины этих треугольников будут соответствовать точкам Лагранжа L_4 и L_5. Они расположены в плоскости орбиты второго тела, в 60° градусах впереди и позади него. Если третье тело имеет пренебрежимо малую массу, и на него воздействуют только гравитационные силы со стороны двух массивных тел, то в точках L_4 и L_5 третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух тел. – Википедия. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point. – *Прим. И.Ф.*

[4] Астероид Ахиллес, № 588. – Wolf M. Wiederauffindung des Planeten (588) [1906 TG] // Astronomische Nachrichten. 1907. Bd. 174. № 3. S. 47–48. – *Прим. И.Ф.*

[5] Путилин И.И. Малые планеты. М.: Гостехиздат, 1953. 412 с.

[6] К настоящему времени известно около 350 астероидов-троянцев, которые двигаются вокруг Солнца по орбите Юпитера, в 60° позади него, в окрестности точки L_5 Юпитера. Википедия. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Trojan_asteroids_(Trojan_camp). – *Прим. И.Ф.*

[7] К настоящему времени известно около 525 астероидов-греков, которые двигаются вокруг Солнца по орбите Юпитера, в 60° впереди него, в окрестности точки L_4 Юпитера. – Википедия. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Trojan_asteroids_(Greek_camp). – *Прим. И.Ф.*

[8] Кроме Гектора, в «чужой лагерь» попал Патрокл (астероид № 617). – *Прим. И.Ф.*

[9] В настоящее время известны астероиды-троянцы не только Юпитера, но и Нептуна, Марса и Земли. – Википедия. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Neptune_trojan, http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Mars_trojan_asteroids, http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_trojan_asteroid. – *Прим. И.Ф.*

[10] Ватсон Ф. Между планетами. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. С. 23.

[11] Уиппл Ф. Земля, Луна и планеты. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 35, 230.

[12] Концентрические пробелы в поясе астероидов. – Kirkwood D. On the theory of meteors // Proceedings of the American Association for the Advancement of Science. 1866. Vol. 15. P. 8–14; Kirkwood D. On the formation and primitive structure of the Solar system // Proceedings of the American Philosophical Society. 1871. Vol. 12. No. 86. P. 163–167. – *Прим. И.Ф.*

[13] Промежуток между внешними (A и B) кольцами Сатурна, ширина около 4800 км. – Cassini G.D. Observations nouvelles touchant le globe & l'anneau de Saturne // Journal des Sçavans. 1677. P. 56–58. – *Прим. И.Ф.*

[14] Мимас, Энцелад, Тефия – спутники Сатурна. – *Прим. И.Ф.*

[15] В настоящий момент известны 16 промежутков в кольцах Сатурна: щели Кассини, Роша, Коломбо, Максвела, Бонда, Дейвса, Гюйгенса, Гершеля, Расселла, Джеффриса, Койпера, Лапласа, Бесселя, Барнарда, Энке и Килера – Википедия. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Rings_of_Saturn. – *Прим. И.Ф.*

[16] Kirkwood D. Loc. cit. – *Прим. И.Ф.*

Галилеевы спутники Юпитера[1]

Эта единственная подсистема Солнечной системы, стимулировавшая благосклонное отношение небесных механиков к резонансу.

Резонанс был обнаружен еще Лапласом[2] в форме дополнительного первого интеграла

$$\varphi_1 - 3\varphi_2 + 2\varphi_3 \approx \pi, \tag{1}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 – планетоцентрические долготы спутников Ио, Европы и Ганимеда. Этот резонанс долгое время был исключительным и в другом смысле. Только он связывал воедино три тела, а не два, как во всех остальных случаях. Форма записи этого замечательного соотношения уже предвещает правильную форму резонанса

$$\omega_1 - 3\omega_2 + 2\omega_3 \approx 0 \tag{2}$$

как целочисленного линейного уравнения для частот ω_1, ω_2, ω_3, а не для периодов, как обычно записывают парные резонансы.

Луна

Вдохновляющий пример резонансного движения демонстрирует наш единственный естественный спутник – Луна. Это тоже «прима» – унисон 1:1 – как и в случае троянцев, но уже вращения с обращением[3].

Джордж Дарвин, сын знаменитого Чарльза Дарвина, был, по-видимому, первым, кто попытался эволюционно проследить возникновение резонансной структуры[4]. Он правильно указал главный фактор эволюции системы Луна–Земля – приливные силы. К сожалению, неверна, как показал Ляпунов[5], исходная гипотеза Пуанкаре[6] об устойчивости грушевидной фигуры вращения жидкой массы. Поэтому теория Дж. Дарвина неприменима даже к вопросу о происхождении двойных звезд, не говоря уже о системе Луна–Земля, для которой наиболее вероятно происхождение из газопылевого облака[7].

Солнечная активность

«Солнце менее полезно, чем Луна, ибо светит днем, когда и без него светло, а Луна ночью»[8]. Кроме того, на Солнце есть пятна. Однако именно солнечные пятна проливают дополнительный свет на проблему возникновения резонансных структур.

Средняя периодичность солнечной активности[9] подозрительно близка к периоду обращения Юпитера[10]. Аристарх Аполлонович Белопольский попытался усмотреть в этом факте причинную связь[11]. Мысль эта, понимаемая буквально, несомненно, неверна, так как солнечная активность не является однопериодическим процессом[12]. Однако открытым остается вопрос, нельзя ли связать солнечную активность с приливным воздействием обеих главных планет – Юпитера и Сатурна.

Независимо от справедливости этой двухчастотной модели пятна на Солнце пополняют нашу коллекцию нетривиальным точным резонансом 1:2 («октава») магнитных и механических явлений, ибо надежно установлено, что полярность пятен меняется на противоположную в соседних циклах.

Планетарные расстояния или частоты?

Эмпирическое правило планетных расстояний Тициуса–Боде[13] положило начало пониманию Солнечной системы как единого целого[14]. Это правило было пересмотрено Отто Юльевичем Шмидтом с эволюционных позиций[15]. Однако основой рассмотрения остались планетные расстояния.

Автор настоящей статьи попытался применить к Солнечной системе идеи нелинейной теории колебаний[16].

---

[1] Крупнейшие спутники Юпитера: Ио, Европа, Ганимед и Каллисто, открыты Галилеем в 1610 г. – Википедия. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Galilean_moons. – *Прим. И.Ф.*

[2] Laplace P.S. Théorie des satellites de Jupiter (suite) // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris. 1789. P. 237–296. – *Прим. И.Ф.*

[3] Другой пример унисона – Галилеевы спутники: как и Луна, они всегда обращены к Юпитеру одной стороной. – *Прим. И.Ф.*

[4] Darwin G.H. The Tides and Kindred Phenomena in the Solar System. Boston: Houghton, Mifflin and Co., 1899. P. 339–343. Имеется перевод: Дарвин Дж.Г. Приливы и родственные им явления в Солнечной системе / Пер. с англ. В.В. Серафимовича. М.-Пг.: Госиздат, 1923, С. 282.

[5] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Харьковское математическое общество, 1892. 250 с.

[6] Poincaré H. Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1902. T. 198. P. 333–373. – *Прим. И.Ф.*

[7] Шмидт О.Ю. Происхождение Земли и планет. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 132 с.

[8] Искаженная цитата из афоризмов Козьмы Пруткова: «Если у тебя спрошено будет: что́ полезнее, солнце или месяц? – ответствуй: месяц. Ибо солнце светит днем, когда и без того светло; а месяц – ночью», Прутков К. Полное собрание сочинений. 4-е изд. СПб.: Типография Стасюлевича, 1894. С. 92. – *Прим. И.Ф.*

[9] 11,11 лет. – Wolf R. Ueber die elfjährige Periode in den Sonnenflecken und erdmagnetischen Variationen // Annalen der Physik und Chemie. 1862. Bd. 193. № 11. S. 502–509.

[10] 11,86 лет. – *Прим. И.Ф.*

[11] Белопольский А.А. Пятна на Солнце и их движение. М.: Университетская типография, 1886. 183 с.

[12] Кирквуд предложил гипотезу о связи солнечной активности (учитывая несколько ее периодов) с приливным воздействием Юпитера, Венеры и Меркурия. – Kirkwood D. On the periodicity of the Solar spots // Proceedings of the American Philosophical Society, 1869. Vol. 11. No. 81. P. 94–102. – *Прим. И.Ф.*

[13] Согласно этому правилу, радиус *i*-й планеты R_i (в астрономических единицах) вычисляется по формуле $R_i = 0{,}1 \times (D_i + 4)$, где D_i = 0, 3, 6, 12, …. – Bode J.E. Anleitung zur Kenntniss des Gestirnten Himmels. Hamburg: Harmsen, 1768. 354 s.; Titius J.D. Footnote // Bonnet K. Betrachtung über die Natur. 2nd ed. Transl. by J.D. Titius. Leipzig: J.F. Junius, 1772. S. 7–8. – *Прим. И.Ф.*

[14] Nieto M.M. Conclusions about the Titius-Bode Law of planetary distances // Astronomy and Astrophysics. 1970. Vol. 8. № 1. P. 105–111.

[15] Шмидт О.Ю. О законе планетных расстояний // Доклады АН СССР. 1946. Т. 52. № 8. С. 673–678.

[16] Молчанов А.М. Резонансы в многочастотных колебаниях // Доклады АН СССР. 1966. Т. 168. № 2. С. 284–287.

Такой подход вынуждал рассматривать частоты (а не большие полуоси) в качестве основных характеристик движения. Обнаружилось, что частоты планет имеют максимально возможный набор резонансных соотношений. Неосторожно высказанная заветная мысль, восходящая к Четаеву[1], о «квантованности» Солнечной системы, «целочисленности» ее структурного принципа вызвала дружное негодование и астрономов, и физиков: «Случайность!» – возмущались первые[2]. «А что играет роль постоянной Планка?» – обличают вторые.

Гипотеза максимальной резонансности, высказанная в цитированной работе[3], может, конечно, оказаться неверной. Однако она полезна самой постановкой вопроса о судьбе любой колебательной системы, эволюционирующей под воздействием слабых диссипативных факторов. Единство подхода к резонансам вращения и обращения выгодно отличает эту гипотезу от любой модификации «правила планетарных расстояний».

Спин-орбитальное взаимодействие

Развитие наблюдательных средств (прежде всего радиолокационной техники) позволило обнаружить новые типы резонансов. Так, у Меркурия был найден резонанс 2:3 («квинта») вращения с обращением[4]. Прошло немного времени, и наблюдения выявили удивительный сложный резонанс вращения Венеры вокруг оси с обращением Земли и Венеры вокруг Солнца[5]. В результате этого резонанса Венера оказывается похожей на Луну – в моменты наибольшего сближения Венера почтительно смотрит на Землю. Впрочем, в реальности этого резонанса сомневается ныне даже его первооткрыватели[6]. Хороший пример колебательности постижения истины!

Ориентация искусственных спутников Земли

Большое разнообразие задач, выполняемых спутниками, делает практически важным систематическое изучение достаточно широкого класса резонансов вращения с обращением – так называемых номинальных движений[7]. Особенно важны, конечно, классические движения лунного (или меркурианского) типа для связных, метеорологических и геодезических спутников.

Но если в «академических» вопросах дело природы позаботиться об устойчивости резонансного движения, то в инженерных вопросах «диссипативный фактор» приходится «загружать на борт спутника» в форме той или иной системы активной стабилизации.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная изучению этого круга вопросов[8].

Аксиоматика небесной механики

Небесная механика за неполных три века существования блестяще справилась со своей задачей – задачей объяснения видимого движения небесных тел. Субботин с законной гордостью писал: «В 1950 удалось показать, что закон всемирного тяготения позволяет представить наблюдения (с 1780 по 1940) пяти планет юпитеровой группы (Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона) со всей той точностью, которую имеют эти наблюдения»[9]. В движении планет земной группы (Меркурий, Венера, Земля и Марс) главная невязка – знаменитое годичное перемещение перигелия Меркурия 5,75 секунды дуги вместо теоретического 5,34 секунды дуги – была объяснена Эйнштейном на основе релятивистского уточнения закона всемирного тяготения[10]. Другие невязки, несравненно более мелкие, устранены после открытия неравномерности вращения Земли[11].

Небесная механика вслед за геометрией стала чисто аксиоматической наукой – таков важнейший методологический результат истории ее развития. Система аксиом небесной механики значительно проще системы аксиом геометрии и записывается тремя строчками уравнений движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ H(p_i, q_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i \neq k}\sum \gamma \frac{m_i m_k}{|q_i - q_k|} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Построение аксиоматики любого явления неминуемо ставит вопрос о границах применимости математиче-

---

[1] Четаев Н.Г. Об устойчивых траекториях динамики // Ученые записки Казанского университета. Математика 1. 1931. Т. 91. № 4. С. 3–8.

[2] Backus G.E. Critique of “the resonant structure of the Solar system” by A.M. Molchanov // Icarus. 1969. Vol. 11. № 1. P. 88–92; Dermot S.F. On the origin of commensurabilities in the Solar system. III – The resonant structure of the Solar system // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1969. Vol. 142. № 2. P. 143–149; Henon M. A comment on “the resonant structure of the Solar system,” by A. M. Molchanov // Icarus. 1969. Vol. 11. № 1. P. 93–94.

[3] Молчанов А.М. Указ. соч.

[4] Colombo G. Rotational period of the planet Mercury // Nature. 1965. Vol. 208. № 5010. P. 575.

[5] Goldreich P., Peal S.J. Resonant spin states in the Solar system // Nature. 1966. Vol. 209. № 5028. P. 1078–1079; Goldreich P., Peal S.J. The dynamics of planetary rotations // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 1968. Vol. 6. № 1. P. 287–320.

[6] Goldreich P., Peal S.J. The obliquity of Venus // Astronomical Journal. 1970. Vol. 75. № 3. P. 273–284.

[7] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

[8] Торжевский А.П. Исследование движения спутника около центра масс. Дис. ... к.ф.-м.н. М.: ИПМ АН СССР, 1969. 224 с.

[9] Субботин М.Ф. Небесная механика // Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд. Т. 29. М.: Госнаучиздат, 1954. С. 328.

[10] Einstein A. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie // Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1915. Bd. 47. № 2. S. 831–839.

[11] Spencer Jones H. The rotation of the Earth // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1926. Vol. 87. № 1. P. 4–31; De Sitter W. On the secular accelerations and the fluctuations of the longitudes of the Moon, the Sun, Mercury and Venus // Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands. 1927. Vol. 4. № 124. P. 21–38.

ской модели. В небесной механике этот вопрос (имеющий специфическую форму проблемы устойчивости планетарной системы) испокон веку стоял драматически остро. Даже для Ньютона и Эйлера, не говоря уже о Галилее, он был прямо связан с проблемой бытия Божия. Постепенно теологический накал остывал, время от времени давая знать острыми вспышками уже чисто научных споров, что под слоем пепла еще таится пламя.

Между тем шло успешное исследование математической модели – теории возмущений гамильтоновых систем. Андрей Николаевич Колмогоров предложил замечательную модификацию итерационного метода Ньютона для доказательства гипотезы об устойчивости многочастотных колебаний относительно гамильтоновых возмущений[1]. Понимаемая буквально, эта гипотеза неверна. Максимально возможное продвижение на этом пути, по-видимому, содержит теорема Арнольда[2]. По его собственным словам она «есть метрический аналог «теоремы» Лапласа об устойчивости планетной системы». И далее: «...исключительное множество начальных условий, … хотя и имеет малую меру…, все же всюду плотно, связно и простирается в бесконечность. Движение при исключительных начальных условиях нужно еще исследовать; a priori оно может оказаться осциллирующим или даже уходящим в бесконечность»[3].

Эти исследования завершают, в существенном, внутреннее изучение свойств математической модели и позволяют тем самым поставить кардинальный вопрос о том, насколько сама модель соответствует изучаемому объекту – реальной планетарной системе.

Точка зрения автора настоящей статьи состоит в следующем: *Классическая небесная механика правильно моделирует поведение реальной планетной системы на малых масштабах времени (сотни тысяч – миллионы лет). Однако во всех эволюционных вопросах (миллиарды лет) и особенно в вопросе о структуре планетной системы гамильтоново приближение недостаточно и дает искаженное представление о свойствах реальной Солнечной системы.*

Консервативные и диссипативные факторы

Некритическое перенесение свойств математической модели на свойства реального объекта является методологической ошибкой. На эту ошибку, в частности (насколько известно автору), указывал Колмогоров как раз по поводу связи его гипотезы с поведением реальной планетарной системы на больших временах. Это общее соображение допускает в интересующем нас случае более точную формулировку.

Рассмотрим систему уравнений с двумя малыми параметрами ε и δ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \delta A \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} + \delta B \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

гамильтонову в главном члене и «дважды возмущенную». Одно возмущение – чисто гамильтоново, консервативное – задается малой поправкой εh к основному гамильтониану H невозмущенной системы

$$\mathcal{H}(p,q) = H(p,q) + \varepsilon h(p,q). \tag{5}$$

Другое возмущение, значительно меньшее по абсолютной величине

$$\delta << \varepsilon << 1, \tag{6}$$

задает неконсервативные поправки δA и δB, описывающие как потерю энергии (или массы) системой, так и подкачку их в систему.

Отбросим сначала сверхмалые ($\delta << \varepsilon$) диссипативные факторы. В математической модели это равносильно предельному переходу $\delta \to 0$. Получится новая, полностью гамильтонова система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \mathcal{H}(x,y) &= H(x,y) + \varepsilon h(x,y) \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Предметом теории возмущений гамильтоновых систем являются именно такие системы. Ясно, что существует немало вопросов, в которых законно пренебрежение диссипативными факторами. К ним, несомненно, относятся эфемеридные задачи. К сожалению, наиболее содержательные (и трудные) результаты, касающиеся поведения гамильтоновых систем при $t \to \infty$, как раз и не могут быть перенесены на системы общего вида. Нетрудно показать, что система (7) дает хорошую аппроксимацию поведения общей системы (4) на «предрелаксационных» временах

$$t << \frac{t_0}{\delta} \tag{8}$$

(t_0 – основной период гамильтоновой системы, например, период обращения Юпитера вокруг Солнца) и

---

[1] Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Доклады АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.

[2] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи математических наук. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.

[3] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике // Проблемы движения искусственных небесных тел: Доклады на Конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии, Москва, 20-25 нояб. 1961. М.: Изд. АН СССР, 1963. С. 17.

совершенно непригодна именно на больших интервалах времени

$$t \gg \frac{t_0}{\delta}. \tag{9}$$

Таким образом, разумная область применимости гамильтоновой теории возмущений ограничена и сверху и снизу:

$$\frac{t_0}{\varepsilon} \le t \le \frac{t_0}{\delta}. \tag{10}$$

На интервалах времени, много меньших, еще не имеет смысла учитывать ε-возмущение, а на временах, много больших, уже нельзя пренебрегать δ-возмущением.

Пример систем с одной степенью свободы

Особенно прозрачно взаимоотношение ε-систем и δ-систем на плоскости (одна степень свободы). Гамильтониан $\mathcal{H}$ является первым интегралом ε-системы

$$\mathcal{H}(p,q) = \text{const} \tag{11}$$

в пространстве любой размерности. Однако плоскость существенно проще. Для нее значение первого интеграла полностью определяет геометрию системы – семейство интегральных кривых

$$H(p,q) + \varepsilon h(p,q) = \text{const}. \tag{12}$$

Эта формула показывает, что на плоскости гамильтоново возмущение лишь немного искажает форму регулярной траектории.

Изображающая точка подобной системы будет вечно двигаться по замкнутой траектории (12), мало отличающейся от замкнутой траектории

$$H(p,q) = \text{const} \tag{13}$$

невозмущенной системы.

Совершенно иначе ведут себя траектории δ-систем. Главной отличительной особенностью этих систем является появление избранных траекторий – предельных циклов, на которые наматываются (как снаружи, так и изнутри) все остальные траектории. Сильно модернизируя оригинальные исследования Пуанкаре[1] и следуя идеям Ван дер Поля[2], напишем уравнение для гамильтониана $\mathcal{H}$ в силу полной системы

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \delta\left(A\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} + B\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right). \tag{14}$$

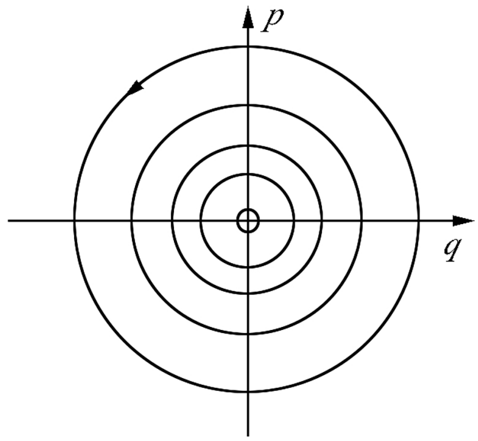


Рис. 1. Линии уровня (окружности) полной энергии $H = \dfrac{p^2+q^2}{2} = E$ гармонического осциллятора.

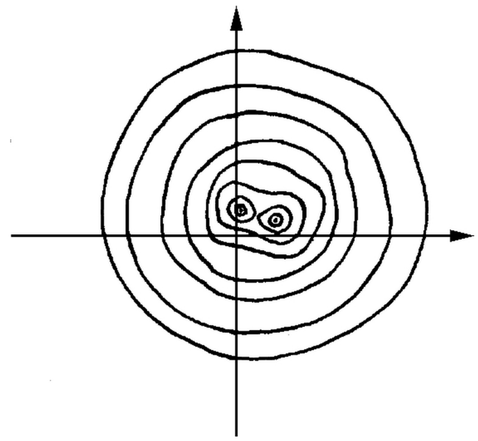


Рис. 2. Возможное искажение траекторий при гамильтоновом возмущении. Вблизи положения равновесия картина может меняться качественно, а не только количественно.

Отбрасывая в правой части члены, осциллирующие при движении по невозмущенной траектории, получим новое уравнение:

$$\frac{dE}{dt} = \delta f(E), \tag{15}$$

правая часть которого есть просто среднее от правой части точного уравнения по быстрой переменной (фазе). Крылов и Боголюбов[3] показали, что переход от уравнения для $\mathcal{H}$ к уравнению для E может быть осу-

[1] Poincaré H. Loc. cit.
[2] Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode) // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 7. 1927. Vol. 3. № 13. P. 65–80.
[3] Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. (Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики). Киев: Изд-во АН УССР, 1937. 364 с.

ществлен при помощи замены переменных

$$\mathcal{H} = E + \delta F(E, \varphi, \delta), \tag{16}$$

исключающей быструю фазу из медленного уравнения для $\mathcal{H}$. «Эволюционное» уравнение для E определяет амплитуды (точнее «энергии») предельных циклов (устойчивых и неустойчивых) полной δ-системы:

$$f(E) = 0. \tag{17}$$

Они совпадают со стационарными точками эволюционного уравнения.

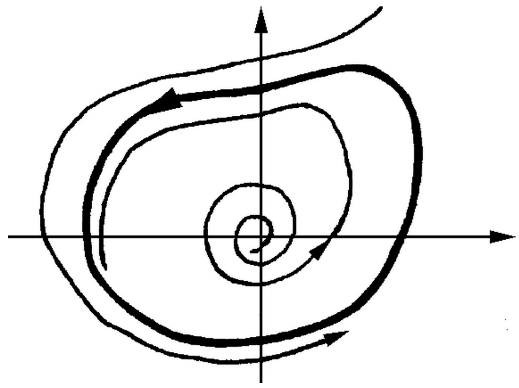


Рис. 3. Возникновение предельного цикла при неконсервативном возмущении. Роль δ-факторов.

Экспериментальный подход

Несмотря на столь явно качественное различие в асимптотической структуре решений, обнаружить разницу в поведении δ- и гамильтоновой систем крайне трудно, и, вероятнее всего, даже невозможно. Это можно понять, если ориентировочно оценить характерные времена в реальной Солнечной системе.

Основной временной масштаб Солнечной системы задается главной колебательной компонентой – обращением Юпитера вокруг Солнца. Для наших целей достаточны оценки порядка величин. Полагаем поэтому

$$T_{♃} \sim 10 \text{ лет.} \tag{18}$$

Основной малый параметр Солнечной системы, характеризующий взаимодействие планет друг с другом, имеет порядок отношения массы всех планет к массе Солнца, то есть величину порядка одной тысячной. Следовательно,

$$T_{\varepsilon} \sim 10^4 \text{ лет.} \tag{19}$$

Диссипативные факторы оцениваются очень ненадежно. Ясно только, что речь идет о величинах (безразмерных) порядка одной миллионной или даже меньше. Поэтому

$$T_{\delta} \sim 10^7\text{–}10^9 \text{ лет.} \tag{20}$$

Все время существования Солнечной системы оценивается величиной в несколько миллиардов лет[1]:

$$T \sim 5\cdot 10^9 \text{ лет.} \tag{21}$$

Из независимых источников (геологических, исследований метеоритов, космических) известно, что диссипативные факторы отнюдь не были столь малыми в ту эпоху, так от нас отдаленную[2]. Подобные соображения подтверждают разумность оценки для T_{δ}, во всяком случае, ее верхнего предела.

Столь грандиозные различия во временах T_{ε} и T_{δ} объясняют трудность наблюдательного «уловления» диссипативных факторов. Сколько-нибудь надежные наблюдательные данные имеются[3] на космогонически ничтожном отрезке времени – менее двух десятков оборотов Юпитера вокруг Солнца. Диссипативный сдвиг элементов любой орбиты лежит поэтому за пределами наблюдаемой точности.

Тем не менее имеется принципиальное отличие ε- и δ-систем, позволяющее, по мнению автора, определенно предпочесть δ-модель для понимания современной структуры Солнечной системы. Главный довод – обилие резонансных явлений и процессов в реальной Солнечной системе. Резонансы непонятны и противоестественны («случайны», расположены на «множестве меры нуль») в гамильтоновых системах. В диссипативных же системах резонансы не только естественны, но и неизбежны[4].

Гипотеза Колмогорова и теорема Арнольда

В настоящее время не существует (на математическом уровне строгости) теории резонансов в линейных колебательных системах. Это, однако, не означает, что невозможно исследование резонансных явлений «на физическом уровне строгости». При таком подходе отбрасывают мешающие члены[5] (уверяя себя и других, что это делается из физических соображений[6], и что отброшенные члены несущественны), после чего оставшиеся изучают.

На следующем этапе удается обычно обнаружить надлежащий малый параметр и построить формальное разложение, главный член которого совпадает с «физической» моделью. Разложение, как правило, оказывается расходящимся.

С этого момента задача становится чисто математической. Обоснование асимптотического разложения со-

---

[1] Уиппл Ф. Указ. соч.
[2] Левин Б.Ю. Происхождение Земли // Известия АН СССР. Физика Земли. 1972. № 7. С. 5–21.
[3] Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 2. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1937. 404 с.
[4] Molchanov A.M. The resonant structure of the Solar system. The law of planetary distances // Icarus. 1968. Vol. 8. № 1–3. P. 203–215.
[5] Паули В. Общие принципы волновой механики. М–Л.: Гостехиздат, 1947. С. 121.
[6] Это «блистательный» пример физической «интуиции» обнаружен И.М. Гельфандом. Математик был бы вынужден довольствоваться «чисто формальным» соображением, что квадратное уравнение $p^2 - p = 0$ имеет только два корня $p = 1$, $p = 0$.

стоит в построении итерационного процесса, обладающего двумя свойствами:

1) Сходимость при некоторых условиях (например, на множестве достаточно большой меры);

2) Совпадение асимптотического ряда с формальным разложением итерации («достаточно большого» отрезка разложения, «достаточно далекой» итерации с «достаточно большим» отрезком асимптотического ряда).

История науки показала высокую эффективность подобного «эстафетного» метода исследований[1]. Нет оснований пренебрегать им и в интересующей нас задаче. Построение асимптотического разложения, не говоря уже об итерационном процессе, выходит за рамки статьи. Но даже определение главного члена и его исследование – вполне содержательная и непростая задача.

Выкладки удобнее проводить, выбрав в качестве независимых переменных первые интегралы и фазы невозмущенной системы:

$$\left.\begin{aligned} J &= J(p,q) \\ \varphi &= \varphi(p,q) \end{aligned}\right\} . \tag{22}$$

Во вполне интегрируемых гамильтоновых системах можно выбрать переменные так, что в надлежащей системе координат[2]

$$\left.\begin{aligned} J &= p \\ \varphi &= q \end{aligned}\right\} . \tag{23}$$

В этих переменных система приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(J) + \varepsilon\omega_1(J,\varphi) + \delta\omega_2(J,\varphi) \\ \frac{dJ}{dt} &= \qquad\quad \varepsilon f_1(J,\varphi) + \delta f_2(J,\varphi) \end{aligned}\right\} . \tag{24}$$

Здесь $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l)$ – быстрые (или фазовые) переменные, а $J = (J_1, \dots, J_m)$ – медленные переменные. Правые части периодичны по каждой фазе с периодом 2π. Весь дальнейший анализ основан только на выписанной форме системы и не зависит от ее происхождения. В частности, при $\delta = 0$ система необязательно обращается в гамильтонову. Однако различие между f_1 и f_2 следует сохранить. Оно состоит в том, что среднее по фазам от f_1 равно нулю:

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_1(J;\varphi_1, \dots, \varphi_l)\, d\varphi_1 \dots\, d\varphi_l = 0 . \tag{25}$$

В гамильтоновых системах это условие выполнено автоматически.

Рассмотрим невозмущенную ($\varepsilon = 0$, $\delta = 0$) систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(J) \\ \frac{dJ}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{26}$$

Медленные переменные «остановились»:

$$J_k(t) = \mathrm{const} , \tag{27}$$

а быстрые совершают условно-периодическое движение:

$$\varphi_i(t) = \omega_i t + \varphi_{i0} . \tag{28}$$

Каждой точке $J = \{J_k\}$ m-мерного пространства медленных переменных J соответствует l-мерный тор пространства быстрых переменных φ, движение по которому происходит со скоростями, определенными вектором частот

$$\omega = \{\omega_i\} = \omega(J) . \tag{29}$$

Гипотеза Колмогорова[3], доказанная Арнольдом[4], состоит в том, что гамильтоново возмущение (члены с ε) немного искажает этот тор, не меняя существенно характера движения. Однако доказательство Арнольда справедливо только для точек общего положения в пространстве J. Это, в частности, означает, что из рассмотрения исключаются все точки, лежащие на резонансных поверхностях пространства J. Каждая такая поверхность определяется целочисленным вектором резонанса $(n_1, n_2, \dots, n_l)$:

$$(n,\omega) \equiv n_1\omega_1(J) + n_2\omega_2(J) + \dots + n_l\omega_l(J) = 0 . \tag{30}$$

Покажем, что вблизи резонансной поверхности возникает резонансная зона, внутри которой движение (даже при чисто гамильтоновом возмущении) существенно отличается от движения, предсказываемого гипотезой Колмогорова.

---

[1] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Иностранная литература, 1951, 504 с.

[2] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи математических наук. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.

[3] Колмогоров А.Н. Указ. соч.

[4] Арнольд В.И. Указ. соч.

«Полубыстрые» переменные

Введем новые переменные: резонансную фазу ψ:

$$\psi = n_1\varphi_1 + ... + n_l\varphi_l \tag{31}$$

и резонансную частоту ν:

$$\nu = n_1\omega_1(J) + ... + n_l\omega_l(J). \tag{32}$$

Эти переменные можно дополнить новыми быстрыми фазами θ и новыми медленными переменными k так, чтобы возникла замена переменных, в результате которой система приобретает вид[1]:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \omega(\nu,k) + \varepsilon\omega_1(\theta,\psi,\nu,k) + \delta\omega_2(\theta,\psi,\nu,k)\\
\frac{d\psi}{dt} &= \nu + \varepsilon\nu_1(\theta,\psi,\nu,k) + \delta\nu_2(\theta,\psi,\nu,k)\\
\frac{d\nu}{dt} &= \varepsilon g_1(\theta,\psi,\nu,k) + \delta g_2(\theta,\psi,\nu,k)\\
\frac{dk}{dt} &= \varepsilon L_1(\theta,\psi,\nu,k) + \delta L_2(\theta,\psi,\nu,k)
\end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Изучаемая резонансная поверхность имеет в новых переменных простое уравнение:

$$\nu = 0. \tag{34}$$

Поэтому как раз вблизи резонансной поверхности резонансная фаза ψ перестает быть быстрой переменной. Вид системы (33) подсказывает идею «выравнивающей» замены переменных[2]

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\nu, \tag{35}$$

которая «выщепляет» пару «полубыстрых» переменных ψ и μ. Вдали от резонанса эта пара распадается на быструю фазу ψ и медленную частоту ν.

Это преобразование, в свою очередь, обнаруживает существование «полубыстрого» времени τ

$$\tau = \sqrt{\varepsilon}t, \tag{36}$$

характерного для резонансных эффектов.

В результате в системе выделяются три группы уравнений – группа из (l-1)-уравнения для быстрых фаз θ, основная группа из двух уравнений для резонансных переменных ψ и μ и, наконец, группа из (m-1)-уравнений для медленных переменных k:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\omega(k,\sqrt{\varepsilon}\mu) + \sqrt{\varepsilon}\omega_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\omega_2\\
\frac{d\psi}{d\tau} &= \mu + \sqrt{\varepsilon}\nu_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\nu_2\\
\frac{d\mu}{d\tau} &= g_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}g_2\\
\frac{dk}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon}G_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}G_2
\end{aligned}\right\}. \tag{37}$$

Исключение быстрых переменных

Следующий шаг – главный во всей программе исследования резонансов. Он состоит в исключении быстрых переменных θ из системы и переходе к изучению эволюционной системы для медленных переменных k и резонансных ψ, μ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\psi}{d\tau} &= \mu + \sqrt{\varepsilon}a_1(\psi,k) + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}a_2(\psi,\mu,k) + ...\\
\frac{d\mu}{d\tau} &= b(\psi,k) + \sqrt{\varepsilon}b_1(\psi,k) + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}b_2(\psi,\mu,k) + ...\\
\frac{dk}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon}F_1(\psi,k) + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}F_2(\psi,\mu,k) + ...
\end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

[1] Molchanov. Loc. cit.

[2] Важно отметить, что *любые* варианты разложений в ряды по малому параметру не могут «выловить» резонансную зону. Это видно из того, что в формулы входит корень из ε. Следовательно (с формальной точки зрения), мы имеем дело с «ветвлением» по комплексному переменному ε.

Именно этот решающий переход и невозможен в настоящее время на математическом уровне строгости. В свое время автор попытался сформулировать теорему о разделении быстрых и медленных движений. К сожалению, формулировка теоремы[1] ошибочна. Автор грустно благодарен Арнольду, заметившему это обстоятельство[2]. Можно предположить, что разделение движений все же имеет место, но не всюду, а на множестве асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) полной меры. Однако в настоящее время не существует даже точной формулировки, не говоря уже о доказательстве подобной теоремы. Удовольствуемся поэтому переходом к эволюционной системе на «физическом уровне строгости». Некоторым утешением могут служить следующие соображения: во-первых, поставлена хорошая математическая задача; во-вторых, «не пропадет наш скорбный труд», так как будущее обоснование все равно будет опираться на свойства эволюционной системы; в-третьих, подобные ситуации уже случались. Так, например, Ван дер Поль изучал хорошие физические задачи еще необоснованным строго методом[3].

Все дальнейшие выводы о свойствах общих колебательных систем имеют поэтому эвристический смысл. Строгими эти исследования станут только после строгого доказательства теоремы о замене переменных.

Однако в частных случаях переход к эволюционной системе может быть обоснован частными методами. Так, например, быстрые переменные могут «по своей доброй воле» не войти в эволюционную систему и тем самым избавят нас от забот. Необходимость уточнения гипотезы Колмогорова[4] вытекает, к слову сказать, из рассмотрения как раз такого примера:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \varepsilon W(q_1 - q_2) \quad (39)$$

Гамильтониан этой системы с двумя степенями свободы определяется потенциалом взаимодействия W, который является произвольной функцией, четной и периодической, своего аргумента – разности q_1 и q_2. Нетрудно проверить, что для этой системы переход к новым переменным полностью решает вопрос. Эволюционные уравнения не содержат быстрой фазы. Быстрая же фаза может быть потом «доинтегрирована» на каждой эволюционной траектории.

«О механицизме»[5]

Рассмотрения этого пункта носят, как уже подчеркивалось, эвристический характер и не претендуют на какую-либо строгость. Полезно, однако, наметить план исследования и угадать общие контуры результата перед тем, как приступать (в других, конечно, работах) к трудным и громоздким точным доказательствам.

Итак, исследуем систему (38), положив, конечно, $\varepsilon = 0$ и тем более $\delta = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{d\tau} = \mu \\ \dfrac{d\mu}{d\tau} = b(\psi, k) \\ \dfrac{dk}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Полученная система обладает весьма примечательными свойствами.

Во-первых, на рассматриваемых временах

$$\tau \sim 1, \quad t \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} << \frac{1}{\varepsilon} \quad (41)$$

все медленные переменные k являются первыми интегралами:

$$k = k_0 = \text{const} \quad (42)$$

Во-вторых, пара «полубыстрых» переменных μ и ψ удовлетворяет уравнению «механического» типа, что проявляется наиболее отчетливо, если исключить μ

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - b(\psi, k) = 0 \quad (43)$$

Из этого факта вытекает вывод высокой общности и значения: *Структура резонансной зоны всегда описывается ньютоновской механикой независимо от происхождения систем.*

Исходная система могла быть биохимической или описывать поведение какого-нибудь экономического

[1] Молчанов А.М. Об эволюции планетных систем // Проблемы движения искусственных небесных тел: Доклады на Конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии, Москва, 20–25 нояб. 1961. М.: Изд. АН СССР, 1963. С. 42–49.

[2] Арнольд В.И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161. № 1. С. 9–12.

[3] Van der Pol. Loc. cit.

[4] Колмогоров А.Н. Указ. соч.

[5] Здесь автор иронизирует по поводу работы: Максимов А. О механицизме и марксизме в естествознании // Под знаменем марксизма. 1933. № 5. С. 124–172. – Известно, что А.А. Максимов «выступал с содокладом при проведении дискуссии “За поворот на фронте естествознания”, проходившей на заседаниях Президиума Комакадемии 23.12.1930–06.01.1931 – дискуссии радикальных марксистов со «старым» естественно-научным руководством, возглавляемым О.Ю. Шмидтом». – Алексеев П.В. Философы России. XIX–XX в.в. 4-е изд. М.: Академический проект, 2002, С. 592. – *Прим. И.Ф.*

объекта, могла возникнуть при изучении поведения плазмы в фотосфере звезды или в задаче популяционной генетики. Все это не имеет значения. Если только в системе имеются быстрые и медленные переменные, если только в системе имеются многочастотные колебания, кинетика самых интересных, самых, если можно так выразиться, «интимных» процессов неминуемо оказывается механической по типу протекания во времени.

Более того, она оказывается ньютоновской в самом узком смысле этого слова. Уравнение (43) формально совпадает с одномерным движением материальной точки в потенциальном поле, задаваемым потенциалом $U(\psi, k)$:

$$U = -\int b(\psi, k)\, d\psi \tag{44}$$

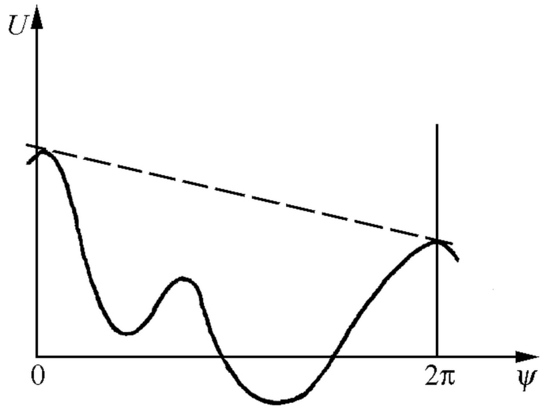


Рис. 4. Обобщенный потенциал U резонансного движения. Функция U оказывается периодичной по резонансной фазе ψ, если исходная система – гамильтонова. В общем случае U есть сумма линейной и периодической функций.

Эти рассуждения можно воспринимать как объяснение столь долгого господства «механицизма». Необходимо, однако, подчеркнуть и решающее отличие развиваемого подхода от традиционного «механицизма».

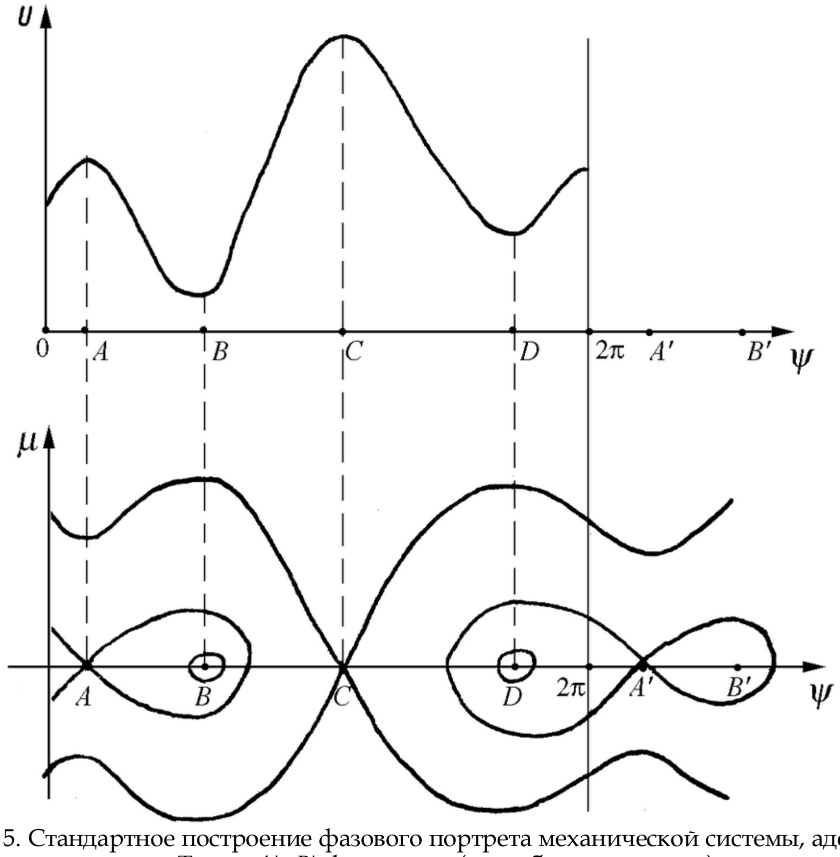


Рис. 5. Стандартное построение фазового портрета механической системы, адекватной изучаемому резонансу. Точки A', B' физически (или «биохимически») совпадают с точками A, B, соответственно, и приведены только для наглядности построения. Истинный фазовый портрет расположен на цилиндре, получающемся сворачиванием полосы шириной 2π, вырезанной из плоскости (μ, ψ).

Прежде всего, этот «механицизм» «кинетический». Обычно под «механицизмом» понимают «механицизм» «морфологический» – утверждение, что все сущее устроено из рычагов, пружинок или, в крайнем случае, является упругой средой (эфиром) с удивительными механическими свойствами. Здесь же утверждается нечто противоположное и, на взгляд автора, существенно более глубокое: Независимо от исходной структуры, от морфологии механическими будут исторические, временные, эволюционные свойства любой системы – ее «поведение», кинетика, кинематика в наиболее интересных критических поворотных пунктах ее развития – в резонансных ситуациях.

Эта идея перекликается с мечтой А. Эддингтона, высказанной около полустолетия назад: «Задача науки – объяснить основные свойства мира не из того, что он устроен именно таким образом, а из того, что он устроен хоть как-нибудь»[1]. Мы видим, что в одном частном случае эта любопытная программа оказывается реальной. Кроме того, приведенные соображения существенно повышают ценность и значение идей и методов, накопленных в механике и математике (теория колебаний).

Эти исследования оказываются относящимися не только к сравнительно узкому кругу чисто механических систем. При надлежащем анализе оказывается возможным в значительно более широком классе систем (в том числе в биологических) выделить ведущие, существенные переменные. После этого замечательным образом оказывается, что соответствующие математические модели уже давно и детально изучены, и пыльные архивы механических журналов обретают новую жизнь. В свою очередь, математическое моделирование в биологии оказывается основанным на прочном, надежном фундаменте математического естествознания[2].

Таков полезный методологический урок, который можно извлечь из сравнительно узкой темы – исследования резонансных движений[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев П.В. Философы России. XIX–XX в.в. 4-е изд. М.: Академический проект, 2002. 1159 с.
Alekseev P.V. (2002). Filosofy Rossii. XIX–XX v.v. 4-e izd. Akademicheskii proekt. Moskva. 1159 p.

2. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике // Проблемы движения искусственных небесных тел: Доклады на Конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии, Москва, 20–25 ноября 1961. М.: Изд. АН СССР, 1963. С. 7–17.
Arnol'd V.I. (1963). Malye znamenateli i problema ustoichivosti v klassicheskoi i nebesnoi mekhanike // Problemy dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel: Doklady na Konferentsii po obshchim i prikladnym voprosam teoreticheskoi astronomii, Moskva, 20-25 noyabrya 1961. Izd. AN SSSR. Moskva. Pp. 7–17.

3. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи математических наук. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
Arnol'd V.I. (1963). Malye znamenateli i problemy ustoichivosti dvizheniya v klassicheskoi i nebesnoi mekhanike // Uspekhi matematicheskikh nauk. T. 18. № 6. Pp. 91–192.

4. Арнольд В.И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161. № 1. С. 9-12.
Arnol'd V.I. (1965). Usloviya primenimosti i otsenka pogreshnosti metoda usredneniya dlya sistem, kotorye v protsesse evolyutsii prokhodyat cherez rezonansy // Doklady AN SSSR. T. 161. № 1. Pp. 9-12.

5. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
Beletskii V.V. (1965). Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass. Nauka. Moskva. 416 p.

6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1977. 430 с.
Beletskii V.V. (1977). Ocherki o dvizhenii kosmicheskikh tel. 2-e izd., ispr. i dop. Nauka. Moskva. 430 p.

7. Белецкий В.В., Хентов А.А. Резонансные вращения небесных тел. Н. Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 1995. 430 с.
Beletskii V.V., Khentov A.A. (1995). Rezonansnye vrashcheniya nebesnykh tel. Nizhegorodskii gumanitarnyi tsentr. N. Novgorod. 430 p.

8. Белопольский А.А. Пятна на Солнце и их движение. М.: Университетская типография, 1886. 183 с.
Belopol'skii A.A. (1886). Pyatna na Solntse i ikh dvizhenie. Universitetskaya tipografiya. Moskva. 183 p.

9. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
Blekhman I.I. (1981). Sinkhronizatsiya v prirode i tekhnike. Nauka. Moskva. 351 p.

10. Ватсон Ф. Между планетами / Пер. с англ. Б.Ю. Левина. М.–Л.: Гостехиздат, 1947, 227 с.
Vatson F. (1947). Mezhdu planetami / Per. s angl. B.Yu. Levina. Gostekhizdat. Moskva – Leningrad. 227 p.

11. Дарвин Дж.Г. Приливы и родственные им явления в Солнечной системе / Пер. с англ. В.В. Серафимовича. М.-Пг.: Госиздат, 1923, 328 с.
Darvin Dzh.G. (1923). Prilivy i rodstvennye im yavleniya v Solnechnoi sisteme / Per. s angl. V.V. Serafimovicha. Gostekhizdat. Moskva-Petrograd. 328 p.

12. Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Доклады АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.
Kolmogorov A.N. (1954). O sokhranenii uslovno-periodicheskikh dvizhenii pri malom izmenenii funktsii Gamil'tona // Doklady AN SSSR. T. 98. № 4. Pp. 527–530.

13. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. (Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики). Киев: Изд-во АН УССР, 1937. 364 с.
Krylov N.M., Bogolyubov H.H. (1937). Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku. (Priblizhennye i asimptoticheskie metody nelineinoi mekhaniki). Izd-vo AN USSR. Kiev. 364 p.

[1] Эта фраза представляет собой афористический пересказ автором страницы текста в книге: Eddington A.S. The mathematical theory of relativity. Cambridge: University Press, 1923. P. 106. – *Прим. И.Ф.*

[2] Эта статья написана А.М. Молчановым в 1974, когда в центре его научных интересов было математическое моделирование колебательных биологических процессов. – *Прим. И.Ф.*

[3] Мнение механика: «... тенденция к синхронизации является своеобразной закономерностью поведения материальных объектов самой различной природы. Несомненно, что такая закономерность представляет собой одно из проявлений тенденции материальных форм к самоорганизации. ... Вместе с тем ... представляется, что неправомерно распространять на общий случай, как иногда делается, яркое высказывание А.М. Молчанова о том, что синхронность (резонансность) характерна для любой эволюционно зрелой динамической системы; по-видимому, и сам А.М. Молчанов имел в виду лишь определенный класс орбитальных динамических систем». – Блехман И.И. Указ. соч. С. 25. – *Прим. И.Ф.*

14. Левин Б.Ю. Происхождение Земли // Известия АН СССР. Физика Земли. 1972. № 7. С. 5–21.
Levin B.Yu. (1972). Proiskhozhdenie Zemli // Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli. № 7. Pp. 5–21.
15. Левитин К. Масштабы времени // Знание – сила. 1986. № 11. С. 24–27.
Levitin K. (1986). Masshtaby vremeni // Znanie – sila. № 11. Pp. 24–27.
16. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Харьковское математическое общество, 1892. 250 с.
Lyapunov A.M. (1892). Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya. Khar'kovskoe matematicheskoe obshchestvo. Khar'kov. 250 p.
17. Максимов А. О механицизме и марксизме в естествознании // Под знаменем марксизма. 1933. № 5. С. 124–172.
Maksimov A. (1933). O mekhanitsizme i marksizme v estestvoznanii // Pod znamenem marksizma. № 5. Pp. 124–172.
18. Молчанов А.М. Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы. Препринт. Пущино: НЦБИ АН СССР, 1974. 19 с.
Molchanov A.M. (1974). Gipoteza rezonansnoi struktury Solnechnoi sistemy. Preprint. NTsBI AN SSSR. Pushchino. 19 p.
19. Молчанов А.М. Нелинейности в биологии. Пущино: ПНЦ РАН, 1992. 222 с.
Molchanov A.M. (1992). Nelineinosti v biologii. PNTs RAN. Pushchino. 222 p.
20. Молчанов А.М. О резонансной структуре Солнечной системы // Современные проблемы небесной механики и астродинамики: Труды Конференции по общим вопросам небесной механики и астродинамики, Москва, 23-29 марта 1967. М.: Наука, 1973. С. 32–42.
Molchanov A.M. (1973). O rezonansnoi strukture Solnechnoi sistemy // Sovremennye problemy nebesnoi mekhaniki i astrodinamiki: Trudy Konferentsii po obshchim voprosam nebesnoi mekhaniki i astrodinamiki, Moskva, 23-29 marta 1967. Nauka. Moskva. Pp. 32–42.
21. Молчанов А.М. Об устойчивости нелинейных систем. Дис. … д.ф.-м.н. М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1962. 115 с.
Molchanov A.M. (1962). Ob ustoichivosti nelineinykh sistem. Dis. … d.f.-m.n. Institut prikladnoi matematiki AN SSSR. Moskva. 115 p.
22. Молчанов А.М. Об эволюции планетных систем // Проблемы движения искусственных небесных тел: Доклады на Конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии, Москва, 20–25 нояб. 1961. М.: Изд. АН СССР, 1963. С. 42–49.
Molchanov A.M. (1963). Ob evolyutsii planetnykh sistem // Problemy dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel: Doklady na Konferentsii po obshchim i prikladnym voprosam teoreticheskoi astronomii, Moskva, 20–25 noyab. 1961. Izd. AN SSSR. Moskva. Pp. 42–49.
23. Молчанов А.М. Резонансы в многочастотных колебаниях // Доклады АН СССР. 1966. Т. 168. № 2. С. 284–287.
Molchanov A.M. (1966). Rezonansy v mnogochastotnykh kolebaniyakh // Doklady AN SSSR. T. 168. № 2. Pp. 284–287.
24. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. А.Н. Крылова // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 7. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1936. 688 с.
N'yuton I. (1936). Matematicheskie nachala natural'noi filosofii / Per. s lat. A.N. Krylova // Sobranie trudov akademika A.N. Krylova. T. 7. Izd. AN SSSR. Moskva-Leningrad. 688 p.
25. Паули В. Общие принципы волновой механики / Пер. с нем. под ред. К.В. Никольского. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 332 с.
Pauli V. (1947). Obshchie printsipy volnovoi mekhaniki / Per. s nem. pod red. K.V. Nikol'skogo. Gostekhizdat. Moskva-Leningrad. 332 p.
26. Прутков К. Полное собрание сочинений. 4-е изд. СПб.: Типография Стасюлевича, 1894. 253 с.
Prutkov K. (1894). Polnoe sobranie sochinenii. 4-e izd. Tipografiya Stasyulevicha. Sankt-Peterburg. 253 p.
27. Путилин И.И. Малые планеты. М.: Гостехиздат, 1953. 412 с.
Putilin I.I. (1953). Malye planety. Gostekhizdat. Moskva. 412 p.
28. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 2. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1937. 404 с.
Subbotin M.F. (1937). Kurs nebesnoi mekhaniki. T. 2. ONTI NKTP. Moskva-Leningrad. 404 p.
29. Субботин М.Ф. Небесная механика // Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд. Т. 29. М.: Госнаучиздат, 1954. С. 324–329.
Subbotin M.F. (1954). Nebesnaya mekhanika // Bol'shaya Sovetskaya Entsiklopediya, 2-e izd. T. 29. Gosnauchizdat. Moskva. Pp. 324–329.
30. Торжевский А.П. Исследование движения спутника около центра масс. Дис. ... к.ф.-м.н. М.: ИПМ АН СССР, 1969. 224 с.
Torzhevskii A.P. (1969). Issledovanie dvizheniya sputnika okolo tsentra mass. Dis. ... k.f.-m.n. IPM AN SSSR. Moskva. 224 p.
31. Уиппл Ф. Земля, Луна и планеты / Пер. с англ. Н.И. Поляковой. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 272 с.
Uippl F. (1948). Zemlya, Luna i planety / Per. s angl. N.I. Polyakovoi. Gostekhizdat. Moskva-Leningrad. 272 p.
32. Харди Г. Расходящиеся ряды / Пер. с англ. Д.А. Райкова. М.: Иностранная литература, 1951. 504 с.
Khardi G. (1951). Raskhodyashchiesya ryady / Per. s angl. D.A. Raikova. Inostrannaya literatura. Moskva. 504 p.
33. Четаев Н.Г. Об устойчивых траекториях динамики // Ученые записки Казанского университета. Математика 1. 1931. Т. 91. № 4. С. 3–8.
Chetaev N.G. (1931). Ob ustoichivykh traektoriyakh dinamiki // Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Matematika 1. T. 91. № 4. Pp. 3–8.
34. Шмидт О.Ю. О законе планетных расстояний // Доклады АН СССР. 1946. Т. 52. № 8. С. 673–678.
Shmidt O.Yu. (1946). O zakone planetnykh rasstoyanii // Doklady AN SSSR. T. 52. № 8. Pp. 673–678.
35. Шмидт О.Ю. Происхождение Земли и планет. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 132 с.
Shmidt O.Yu. (1962). Proiskhozhdenie Zemli i planet. Izd-vo AN SSSR. Moskva. 132 p.
36. Backus G.E. Critique of “the resonant structure of the Solar system” by A.M. Molchanov // Icarus. 1969. Vol. 11.

№ 1. P. 88–92.
37. Bode J.E. Anleitung zur Kenntniss des Gestirnten Himmels. Hamburg: Harmsen, 1768. 354 s.
38. Cassini G.D. Observations nouvelles touchant le globe & l'anneau de Saturne // Journal des Sçavans. 1677. P. 56–58.
39. Colombo G. Rotational period of the planet Mercury // Nature. 1965. Vol. 208. № 5010. P. 575.
40. Darwin G.H. The Tides and Kindred Phenomena in the Solar System. Boston: Houghton, Mifflin and Co., 1899. 378 p.
41. Dermot S.F. On the origin of commensurabilities in the Solar system. III – The resonant structure of the Solar system // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1969. Vol. 142. № 2. P. 143–149.
42. De Sitter W. On the secular accelerations and the fluctuations of the longitudes of the Moon, the Sun, Mercury and Venus // Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands. 1927. Vol. 4. № 124. P. 21–38.
43. Eddington A.S. The mathematical theory of relativity. Cambridge: University Press, 1923. 246 p.
44. Einstein A. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie // Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1915. Bd. 47. № 2. S. 831–839.
45. Goldreich P., Peal S.J. Resonant spin states in the Solar system // Nature. 1966. Vol. 209. № 5028. P. 1078–1079.
46. Goldreich P., Peal S.J. The dynamics of planetary rotations // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 1968. Vol. 6. № 1. P. 287–320.
47. Goldreich P., Peal S.J. The obliquity of Venus // Astronomical Journal. 1970. Vol. 75. № 3. P. 273–284.
48. Henon M. A comment on "the resonant structure of the Solar system," by A. M. Molchanov // Icarus. 1969. Vol. 11. № 1. P. 93–94.
49. Kepler J. Astronomia nova αιτιολογητοσ, seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae martis. Heidelberg: Voegelin, 1609. 337 p.
50. Kirkwood D. On the formation and primitive structure of the Solar system // Proceedings of the American Philosophical Society. 1871. Vol. 12. No. 86. P. 163–167.
51. Kirkwood D. On the periodicity of the Solar spots // Proceedings of the American Philosophical Society, 1869. Vol. 11. No. 81. P. 94–102.
52. Kirkwood D. On the theory of meteors // Proceedings of the American Association for the Advancement of Science. 1866. Vol. 15. P. 8–14.
53. Lagrange J.-L. Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps, qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences en 1772 // Recueil des Pieces qui ont Remporté les Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris. 1777. T. 9. P. 1–126.
54. Lagrange J.-L. Sur l'altération des moyens mouvements des planètes // Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. 1776. T. 7. P. 199–213.
55. Laplace P.S. Recherches: 1° Sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards; 2° Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris (Savants Étrangeres). 1776. T. 7. P. 37–232.
56. Laplace P.S. Théorie des satellites de Jupiter (suite) // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris. 1789. P. 237–296.
57. Molchanov A.M. Resonances in complex systems: A reply to critiques // Icarus. 1969. Vol. 11. № 1. P. 95–103.
58. Moltchanov A.M. Sur l'évolution des systèmes planétaires // Dynamics of Satellites: Proceedings of the Symposium of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM), 28–30 May 1962, Paris, France. Berlin: Springer, 1963. P. 40–50.
59. Molchanov A.M. The reality of resonances in the Solar system // Icarus. 1969. Vol. 11. № 1. P. 104–110.
60. Molchanov A.M. The resonant structure of the Solar system. The law of planetary distances // Icarus. 1968. Vol. 8. № 1–3. P. 203–215.
61. Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica. London: Joseph Streater, 1687. 510 p.
62. Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica. 2nd enl ed. Cantabrigiae, 1713. 484 p.
63. Nieto M.M. Conclusions about the Titius-Bode Law of planetary distances // Astronomy and Astrophysics. 1970. Vol. 8. № 1. P. 105–111.
64. Poincaré H. Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1902. Vol. 198. P. 333–373.
65. Spencer Jones H. The rotation of the Earth // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1926. Vol. 87. № 1. P. 4–31.
66. Titius J.D. Footnote // Bonnet K. Betrachtung über die Natur. 2nd ed. Transl. by J.D. Titius. Leipzig: J.F. Junius, 1772. S. 7–8.
67. Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode) // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 7. 1927. Vol. 3. № 13. P. 65–80.
68. Wolf M. Wiederauffindung des Planeten (588) [1906 TG] // Astronomische Nachrichten. 1907. Bd. 174. № 3. S. 47–48.
69. Wolf R. Ueber die elfjährige Periode in den Sonnenflecken und erdmagnetischen Variationen // Annalen der Physik und Chemie. 1862. Bd. 193. № 11. S. 502–509.